9 Существование равновесия в модели Неймана

Теперь обратимся к учету фактора времени в линейных производственных моделях и сначала рассмотрим динамический вариант модели Неймана. Будем считать, что матрицы затрат A и выпуска B постоянны, а вектор интенсивностей x меняется со временем. Также предположим, что

- экономика функционирует в течение T периодов времени;
- в каждый период $[t-1, t]$ для производства применяется один из процессов множества $C = \{(y,z) \mid \exists x \geq 0 : y = Ax,\ z = Bx\}$, характеризующихся вектором интенсивностей $x(t)$;
- на производство в периоде $[t, t+1]$ могут быть потрачены только те продукты, которые были произведены в период $[t-1, t]$ (модель является замкнутой), т.е. $Ax(t) \leq Bx(t-1)$. Значение величины начальных запасов $Bx(0)$ считается. Последовательность векторов $x(1), x(2), ..., x(T) \overset{def}{=} \{x(T)\}$, удовлетворяющая этому неравенству, будем называть ***планом***.

Здесь мы учтем отмеченный в самом начале главы 2 факт разделения во времени моментов оплаты производителями затрат и получения выручки от продаж. Для этого мы предположим, что все товары имеют цены, изменяющиеся от периода к периоду: $p^i(t-1)$ – цена единицы продукции в период $[t-1, t]$, $p(t-1) = (p^1(t-1), ..., p^n(t-1))$, $p(t-1) \geq 0$. В таком случае доход производственного процесса (a^j, b^j) в период $[t-1, t]$ составляет $\left\langle p(t), b^j \right\rangle - \left\langle p(t-1), a^j \right\rangle$. Поскольку рассматриваемая экономическая система является замкнутой, то в ней должно выполняться условие сохранение денежной массы. Это означает, что ни один из процессов не должен иметь положительного дохода: $p(t-1)A \geq p(t)B$.

В явном виде предположения о неизменности денежной массы и постоянном ее обращении (вся выручка от продажи идет на закупку сырья) записывается в виде системы:

$$p(t-1)Ax(t) = p(t)Bx(t) \quad , \quad t = 1, 2, ..., T \tag{0.1}$$

$$p(t)Bx(t-1) = p(t)Ax(t) \quad , \quad t = 1, 2, ..., T \quad . \tag{0.2}$$

При изучении поведения динамических систем важную роль играют стационарные траектории.

Определение. Траектория $\{x(t)\}$ называется ***стационарной***, если существует число $\nu > 0$, такое что $x(t) = \nu x(t-1)$ (или $x(t) = \nu^t x(0)$).

Для того чтобы траектория интенсивностей $\{x(t)\} = \{\nu^t x\}$ была стационарной в модели Неймана, необходимо и достаточно, чтобы $\nu Ax \leq Bx$. Аналогично, траектория цен $\{p(t)\} = \{\mu^{-t} p\}$ стационарная тогда и только тогда, когда $\mu pA \geq pB$.

Для стационарных траекторий интенсивностей и цен условия неизменности денежной массы (0.1) и (0.2) принимают, соответственно, вид: $\mu pAx = pBx$, $\nu pAx = pBx$.

Определение. Модель Неймана находится в состоянии динамического равновесия, описываемого параметрами (ν, μ, x, p), где числа $\nu > 0$, $\mu > 0$, а x, p – неотрицательные векторы, если

$$\nu Ax \leq Bx \quad , \quad \mu pA \geq pB \quad , \quad \mu pAx = pBx \quad , \quad \nu pAx = pBx \quad . \tag{0.3}$$

Из системы (0.3) следует, что $\nu = \mu \overset{def}{=} \alpha$, т.е. темп роста интенсивности производства и темп падения цен совпадают.

Определение. Невырожденным положением равновесия в модели Неймана называется тройка (α, x, p), где $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}^m_+$, $p \in \mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\alpha Ax \leq Bx \tag{0.4}$$

$$\alpha pA \geq pB \tag{0.5}$$

$pAx > 0$. (0.6)

Луч $\{y \mid \exists \mu \geq 0,\ y = \mu x\}$, где вектор x участвует в невырожденном положении равновесия, называется ***лучом Неймана.***

Теорема. Пусть в модели Неймана $A \geq 0$, $B \geq 0$ и в матрице A нет нулевых столбцов, в матрице B нет нулевых строк. Тогда существует решение системы (0.4)-(0.6).

Условия этой теоремы означают, что нет производственных процессов, которые ничего не тратят, и всякий процесс производит продукт.

Доказательство. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\min u$$
$$(A - \lambda B)x - ue^n \leq 0,\ \langle x, e^m \rangle = 1,\ x \geq 0. \tag{0.7}$$

Здесь λ – числовой параметр, x, u – переменные, e^n – n-мерный единичный вектор, e^m – m-мерный единичный вектор. Функция $u(\lambda)$, являющаяся значением задачи (0.7) в зависимости от параметра λ, обладаем следующими свойствами:

1) $u(\lambda)$ непрерывна на всей числовой оси,
2) $u(0) > 0$,
3) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} u(\lambda) = -\infty$,
4) $u(\lambda)$ монотонно убывает.

Из этих свойств следует, что существует $\bar{\lambda} > 0$, для которого $u(\bar{\lambda}) = 0$. Обозначим через $\bar{x}$ соответствующее решение задачи (0.7). Тогда $A\bar{x} \leq \bar{\lambda} B\bar{x},\ \bar{x} \geq 0$.

Рассмотрим задачу, двойственную к (0.7):

$$\max v$$
$$p(A - \lambda B) - ve^n \geq 0,\ \langle p, e^n \rangle = 1,\ p \geq 0. \tag{0.8}$$

По теореме двойственности $v(\bar{\lambda}) = 0$. Обозначим через $\bar{p}$ соответствующее решение задачи (0.8). Тогда $\bar{p}A \geq \bar{\lambda}\bar{p}B,\ \bar{p} \geq 0$. Таким образом, тройка $(\bar{\lambda}^{-1}, \bar{x}, \bar{p})$ является положением равновесия в модели Неймана. Однако оно может быть вырожденным.

Для указания невырожденного положения равновесия рассмотрим множество решений уравнения $u(\lambda) = 0$. Из свойств функции $u(\lambda)$ нетрудно заключить, что это множество является отрезком $[\lambda_0, \lambda_1]$, причем $\lambda_0 > 0$. Покажем, что существует невырожденное равновесие, соответствующее числу $\alpha = \lambda_1^{-1}$.

Среди всех решений $\bar{p}$ задачи (0.8) выберем p^*, для которого вектор p^*A обладает наибольшим числом положительных компонент. Теперь покажем, что существует вектор x^*, который образует вместе с указанными α и p^* невырожденное положение равновесия. Допустим противное. Тогда из того, что $(A - \lambda_1 B)x \leq 0$ и $x \geq 0$ следует, что $p^*Ax \leq 0$. По теореме о линейных неравенствах, это означает, что существует неотрицательный вектор q, удовлетворяющий условию $q(A - \lambda_1 B) \geq p^*A$.

Вектор q обладает следующими свойствами:

$$(qA)_j > \lambda_1 (qB)_j,\ \ \textit{для}\ \ j \notin \{j \mid (pA)_j = 0\},$$
$$(qA)_j = \lambda_1 (qB)_j = 0,\ \ \textit{для}\ \ j \in \{j \mid (pA)_j = 0\},$$

которые означают, что существует $\Delta > 0$ такой, что $qA \geq (\lambda_1 + \Delta)B$, т.е. вектор $(q, 0)$ допустим для задачи (0.8) при $\lambda = \lambda_1 + \Delta$. Следовательно, $u(\lambda_1 + \Delta) = v(\lambda_1 + \Delta) \geq 0$, что противоречит свойствам функции $u(\lambda)$ и максимальности числа λ_1. Тем самым показано, что числу λ_1 отвечает невырожденное положение равновесия $(\lambda_1^{-1}, x^*, p^*)$, и теорема доказана.

Приведенное доказательство является конструктивным, поскольку оно указывает способ нахождения числа λ_1, определяющего темп роста экономики в модели Неймана.

Отметим связь между состояниями равновесия модели Неймана и решениями задач (0.7) и (0.8).

Теорема. Тройка (α, x, p) является положением равновесия (быть может, вырожденного) в модели Неймана тогда и только тогда, когда $u(\alpha^{-1}) = 0$, а пары $(x, 0)$ и $(p, 0)$ являются, соответственно, решениями пары двойственных задач (0.7) и (0.8) при $\lambda = \alpha^{-1}$.

Определение. Число α называется темпом роста.

Определение. Число λ_0 называется ***числом Неймана***, число λ_1 – ***числом Фробениуса*** модели Неймана (A, B).

Числа $\alpha = \lambda_0^{-1}$ и $\beta = \lambda_1^{-1}$ определяют, соответственно, максимально и минимально возможные темпы роста по стационарной траектории.

Отметим имеющуюся аналогию между собственными числами матрицы Леонтьева и темпами роста модели Неймана с точки зрения продуктивности.

Определение. Модель Неймана (A, B) ***продуктивна***, если система $Bx - Ax \geq c$, $x \geq 0$, имеет решение при любом $c \geq 0$.

Теорема. Модель Неймана продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше 1.